Matemática Discreta y Álgebra - Curso 2020/21. APLICACIONES LINEALES

1. Estúdiese cuáles de las siguientes aplicaciones, definidas de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$, son lineales:

   a) $f(x, y) = (0, y, 0)$
   b) $f(x, y) = (x, x + y, x - y)$
   c) $f(x, y) = (2x + y, 0, 2y + x)$
   d) $f(x, y) = (x + y, 2, x)$

   Solución:

   a) Lineal
   b) Lineal
   c) Lineal
   d) No lineal

2. Sea f una aplicación lineal de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$ tal que

   $$f(u_1) = v_1 + 2v_2 - 3v_3, f(u_2) = -v_1 + 4v_2 - v_3$$

   donde $B = \{u_1, u_2\}$ y $B' = \{v_1, v_2, v_3\}$ son bases de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ respectivamente. Hállese la imagen del vector $u = (2, -1)_B$.

   Solución: Las imagen del vector u en $(3, 0, -5)_{B'}$

3. Calcúlese la matriz asociada a la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por

   $$f(x, y, z) = (x - y + z, 2x - z)$$

   respecto de las bases canónicas.

   Solución: $Mf_{B_c \to B_c} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$,

4. Se considera la aplicación lineal de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ que está dada por $f(x, y) = (x+y, -y, y-x)$. Calcúlese, respecto de las bases canónicas:

   - La matriz asociada
   - Las ecuaciones de la aplicación
   - Una base del núcleo
   - La dimensión del núcleo
   - Una base de la imágen
   - El rango de la aplicación
   - Compruébese la fórmula $n = dimker(f) + dimIm(f)$

   Solución:

   - $Mf_{B_c \to B_c} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
   - $x' = x + y$
     $y' = -y$
     $z' = -x + y$
   - Una base del núcleo es $\{(0, 0)\}$
   - $dimkerf = 0$
   - Una base de la imagen es $\{(1, 0, -1), (1, -1, 1)\}$

- $dimimf = 2$
- $2 = n = dimker(f) + dimIm(f) = 0 + 2$

5. Se dice que un vector u es invariante por una aplicación lineal f si verifica que $f(u) = u$. Hállese todos los vectores invariantes por las aplicaciones lineales definidas de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot\mathbb{R})$ en sí mismo siguientes:

    - $f(x, y, z) = (3x, 4y, 5z)$
    - $f(x, y, z) = (x, 2x + y, 3x + 2y + z)$
    - $f(x, y, z) = (2x - y, 2y - z, 2z - x)$

    Solución:

    - El único es el $\{(0, 0, 0)\}$
    - El conjunto de vectores que lo cumplen son $\{(0, 0, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$
    - El conjunto de vectores que lo cumplen son $\{(\alpha, \alpha, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$

6. Hállense todos los vectores que verifican la igualdad $f(u) = \lambda$u, para algún escalar λ, para las aplicaciones lineales del ejercicio anterior.

    Solución:

    - Si $\lambda \neq 3, 4, 5$ el sistema tiene solución única y es $\{(0, 0, 0)\}$
      Si $\lambda = 3$ entonces la solución es $\{(\alpha, 0, 0) : \alpha \in \mathbb{R}\}$
      Si $\lambda = 4$ entonces la solución es $\{(0, \alpha, 0) : \alpha \in \mathbb{R}\}$
      Si $\lambda = 5$ entonces la solución es $\{(0, 0, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$
    - Si $\lambda \neq 1$ el sistema tiene solución única y es $\{(0, 0, 0)\}$
      Si $\lambda = 1$ entonces la solución es $\{(0, 0, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$
    - Si $\lambda \neq 1$ el sistema tiene solución única y es $\{(0, 0, 0)\}$
      Si $\lambda = 1$ entonces la solución es $\{(\alpha, \alpha, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$

7. Sea f una aplicación lineal entre los espacios $(V, +, \cdot\mathbb{R})$ y $(W, +, \cdot\mathbb{R})$ definida por:

    $$f(u_1) = v_1 + 2v_2 - v_3 - 2v_4, f(u_2) = v_1 - v_3, f(u_3) = v_2 - v_4$$

    donde $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ y $B' = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ son bases de V y W respectivamente. Calcúlense:

    - La imagen del vector $u = u_1 + u_2 - 2u_3$
    - La matriz de la aplicación lineal.
    - El núcleo y el rango de la aplicación lineal
    - Comprueba qué vectores u verifican $f(u) = -v_1 - v_2 + v_3 + v_4$.

    Solución:

    - La imagen del vector es $(2, 0, -2, 0)_{B'}$
    - $Mf_{B_1 \to B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
    - Una base del núcleo es $\{(1, -1, -2)_B\}$ y el rango es la dimensión de la imagen, que usando la fórmula que conocemos, nos da como resultado 2.
    - Queremos ver que vectores tienen por imagen los vectores con coordenadas $\{(-1, -1, 1, 1)_{B_2}\}$. Resolviendo el sistema tenemos que son el conjunto $\{(\alpha, -1 - \alpha, -1 - 2\alpha)_B : \alpha \in \mathbb{R}\}$

8. Sea f la aplicación lineal de $(V, +, \cdot\mathbb{R})$ en sí mismo definida por:

    $$f(u_1) = v_1 + v_3, f(u_2) = 2v_1 - v_2, f(u_3) = v_2 - v_3$$

    donde $B_1 = \{u_1, u_2, u_3\}$ y $B_2' = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ son dos bases de V. Calcúlense:

- La matriz de la aplicación lineal respecto de B_1 y B_2
- Las ecuaciones de la aplicación y la imagen del vector $u = u_1 + u_2 + u_3$.
- La dimensión de $\mathrm{Ker}(f)$ y el rango de la aplicación.
- Comprueba si es inyectiva, sobreyectiva o biyectiva.

Solución:

- $Mf_{B_1 \to B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
- $x' = x + 2y$
  $y' = -y + z$
  $z' = x - z$
  La imagen del vector u es $(3, 0, 0)_{B_2'}$
- La dimensión de $\mathrm{Ker}(f)$ es 0 y la dimensión de la imagen es 3.
- Es biyectiva, ya que es inyectiva y sobreyectiva.

9. Sea f la aplicación lineal de $(V, +, \cdot\mathbb{R})$ en sí mismo definida por:

$$f(u_1) = 2u_1 - u_2 - u_3, f(u_2) = -7u_2 + u_3, f(u_3) = 3u_1 - 2u_3$$

donde $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ es una base de dicho espacio. Hállese la matriz de la aplicación lineal f respecto de la base $B_2 = \{v_1, v_2, v_3\}$ donde

$$v_1 = u_1 - u_3, v_2 = u_1 + u_2, v_3 = u_3$$

Solución: $Mf_{B_2 \to B_2} = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 3 \\ -1 & -8 & 0 \\ 1 & 10 & 1 \end{pmatrix}$

10. Dada la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x, y, z) = (x + y + z, x - y + z),$$

la base $B = \{(0, 2, 4), (0, 4, 2), (1, 0, 0)\}$ de $\mathbb{R}^3$, y la base $C = \{(6, 2), (6, -2)\}$ de $\mathbb{R}^2$,

a) calcula la matriz de f respecto de las base B y C,
b) calcula la matriz de cambio de base de la base canónica de $\mathbb{R}^3$ a la base B,
c) calcula la matriz de cambio de base de la base C a la base canónica de $\mathbb{R}^2$,
d) calcula la matriz de f respecto de las bases canónicas a partir de las matrices que has hallado en los apartados anteriores.

Solución:

a) $Mf_{B \to C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & -1/6 \end{pmatrix}$
b) $M_{B_c \to B} = \begin{pmatrix} 0 & -1/6 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & -1/6 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
c) $M_{C \to B_c} = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$
d) $Mf_{B_c \to B_c} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

11. Considera los siguiente conjunto de vectores

$$B = \{(1, 2, 3, 4), (1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1), (2, -1, 3, 1)\},$$

$$C = \{(1, 2, 3), (1, 0, 1), (0, a, 0)\}$$

y la aplicación $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$f(x, y, z, t) = (2x + y,\ y + 3z - t,\ x + z - t).$$

(a) Comprueba que los vectores del conjunto B son una base de $\mathbb{R}^4$.

(b) ¿Para qué valores de a los vectores de C forman una base de $\mathbb{R}^3$? Justifica tu respuesta.

(c) Comprueba que f es una aplicación lineal.

(d) Calcula la matriz de f respecto de las bases canónicas de $\mathbb{R}^4$ y $\mathbb{R}^3$.

(e) Tomando $a = 1$ en el conjunto C, calcula la matriz de f respecto de las bases B y C.

(f) Halla la matriz de cambio de base de la base canónica de $\mathbb{R}^4$ a la base B.

(g) Tomando $a = 1$ en el conjunto C, halla la matriz de cambio de base de la base C a la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

(h) Relaciona entre sí las matrices que has hallado en los apartados (d), (e), (f) y (g).

Solución:

(a) Efectivamente, si colocamos los vectores de la base por columnas y calculamos el rango de la matriz, efectivamente es 4 y por tanto son linealmente independientes. 4 vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^4$ forman una base.

(b) Ponemos los vectores de la base C por columnas y hacemos su determinante. Los valores de a que hagan que el determinante sea distinto de 0 harán que formen una base por ser linealmente independiente. Así, tenemos que son $a \neq 0$.

(c) Debemos comprobar que se cumplan las dos propiedades de funciones lineales: $f((x_1, y_1, z_1, t_1)+(x_2, y_2, z_2, t_2)) = f((x_1, y_1, z_1, t_1))+f((x_2, y_2, z_2, t_2))$ y $f(\alpha(x_1, y_1, z_1, t_1)) = \alpha f((x_1, y_1, z_1, t_1))$

(d) $Mf_{B_c \to B_c} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

(e) $Mf_{B \to C} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 & 1/2 \\ 6 & 2 & 2 & 5/2 \\ 11 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

(f) $M_{B_c \to B} = \begin{pmatrix} -1 & 1/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & 3/2 & 1 & -3/2 \\ 3 & -1 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

(g) $M_{C \to B_c} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(h) $Mf_{B_c \to B_c} = M_{C \to B_c} Mf_{B \to C} M_{B_c \to B_c}$

12. Consideremos una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$. Si $\{v_1, v_2, v_3\}$ es base de $\mathbb{R}^3$, ¿pueden ser

$$\{f(v_1),\ f(v_2),\ f(v_3)\}$$

linealmente independientes? Justifica tu contestación.

Solución: Como ese conjunto está en $\mathbb{R}^2$, que tiene dimensión 2, no puede haber conjunto de vectores linealmente independiente con más de 2 vectores, por tanto siempre será linealmente dependiente.