Matemática Discreta y Álgebra - Curso 2020/21
Parte I: Álgebra de Matrices y Sistemas de Ecuaciones Lineales

1. Sean las matrices A, B, C y D dadas por: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$,
$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$ Calcule los resultados de las siguientes operaciones si están definidos. Si no están definidos indique por qué:
(a) AB (b) $-3B$ (c) AC (d) CD (e) $-2AC + 5B$

2. Calcule las matrices traspuestas de las siguientes matrices: $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$,
$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & -5 & -2 & 7 \end{pmatrix}$

3. Decir si la matriz $C = \begin{pmatrix} -7 & -5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ es la inversa de la matriz A= $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -7 \end{pmatrix}$

4. Indique si las siguientes matrices son elementales: $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5. Dadas la matrices cuadradas A y B: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 5 & 6 \\ 5 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \\ -5 & -1 & 9 \end{pmatrix}$

   Calcular sus inversas A^{-1} y B^{-1} usando las matrices aumentadas [A I] y [B I] respectivamente, donde I es la matriz identidad de la misma dimensión que ambas

6. Responda y razone las respuestas a las siguientes preguntas:
   a) ¿Puede una matriz cuadrada con dos columnas iguales ser invertible?
   b) ¿Puede una matriz cuadrada con una fila de ceros ser invertible?
   c) ¿Puede ser invertible una matriz 4x4 cuando sus columnas no generan a $\mathbb{R}^4$?

7. Calcule la inversa de la matriz cuadrada $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

8. De acuerdo con el resultado obtenido en ejercicio anterior, comente cómo será la solución del siguiente sistema homogéneo cuya matriz de coeficientes es la matriz A de dicho ejercicio: $\begin{cases} -x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$.

9. Indicar para cada una de las siguientes ecuaciones si son o no lineales:
   a) $3x + 4y = 24$
   b) $x_1 - x_2 + 5x_3 + (\sqrt{2})x_4 = 1$
   c) $e^2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 0$
   d) $3x^2 + 4y = 24$

e) $x_1 - x_2 + 5x_3 + 2\sqrt{x_4} = 1$

f) $e^{2x_1} - 3x_2 + x_3 - x_4 = 0$

g) $x_1 x_2 + 5x_3 = 2$

10. Comente la solución del sistema: $\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 - x_2 = 4 \end{cases}$

11. Indique si las 3 rectas siguientes tienen un punto de intersección común. Explique la respuesta $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = -1 \\ 6x_1 + 5x_2 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 = 7 \end{cases}$

12. Conseguir un sistema escalonado mediante eliminación (o reducción) gaussiana equivalente a $\begin{cases} x_2 - 4x_3 = 8 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ 5x_1 - 8x_2 + 7x_3 = 1 \end{cases}$

    Indicar si tiene solución.

13. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones por el método de Gauss-Jordan, es decir obteniendo una forma escalonada reducida de dicho sistema $\begin{cases} x_1 - 4x_2 + x_3 = 2 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_3 = 3 \end{cases}$

14. Transforme la siguiente matriz ampliada, correspondiente a un sistema lineal, primero en su forma escalonada y después en su forma escalonada reducida. Resuelva dicho sistema. $\begin{pmatrix} 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \end{pmatrix}$

15. La matriz aumentada de un sistema lineal se transformó, mediante operaciones de fila, en la forma que se indica a continuación. Determine si el sistema es compatible $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & -6 \\ 0 & 4 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

16. ¿Para qué valores de h y k es consistente el siguiente sistema? $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = h \\ -6x_1 + 3x_2 = k \end{cases}$. Compruebe que el rango de la matriz de coeficientes A calculado por filas coincide con el rango calculado por columnas.

17. Calcular el rango de la siguiente matriz: $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & -0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 8 \end{pmatrix}$ Responda a las siguientes preguntas:

    - ¿Cuántas filas linealmente independientes tiene la matriz? ¿y columnas?
    - Si dicha matriz fuese la matriz ampliada de un sistema de ecuaciones. ¿Cuántas soluciones tendría el sistema según el Teorema de Rouché-Frobenius?

18. Indique el tipo de solución que tiene el sistema deduciéndolo mediante el Teorema de Rouché-Frobenius $\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ 2x_1 - 2x_2 = 4 \end{cases}$

19. Calcule los siguientes determinantes utilizando un desarrollo de adjuntos a lo largo de la primera fila: $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 6 & 5 & 2 \\ 9 & 7 & 3 \end{pmatrix}$

20. Calcule el determinante de la siguiente matriz, aplicando un desarrollo por adjuntos y operaciones elementales por filas: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -7 & 3 \\ 0 & 3 & 6 & 2 \\ -2 & -5 & 4 & -2 \end{pmatrix}$

21. Calcule el determinante de la siguiente matriz: $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -7 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & -6 & 4 & -8 \\ 5 & 0 & 5 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 9 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

22. Indique cuáles de las siguientes matrices son invertibles mediante el valor de su determinantes: $A = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -9 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$

23. Calcule la inversa de la matriz : $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ a partir de la matriz adjunta. ¿Tiene solución única el sistema de ecuaciones $Ax = b$? Calcúlela a partir de A^{-1}

24. Calcule la matriz inversa de A empleando la matriz adjunta, siendo: $= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

25. Use la regla de Cramer para resolver el sistema: $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 6 \\ -5x_1 + 4x_2 = 8 \end{cases}$

26. Calcule el rango de la siguiente matriz usando determinantes:$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & -1 & -2 \\ 0 & -4 & 5 & 1 \\ -3 & 10 & -6 & 8 \end{pmatrix}$

27. Resolver los siguientes sistemas lineales por el método de Gauss:

$$\left\{ \begin{array}{rr} 2x - 5y + 4z + u - v = & 3 \\ x - 2y + z - u + v = & 5 \\ x - 4y + 6z + 2u - v = & 10 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{rr} 4x - 3y + 2z + u = & 3 \\ x - 2y + z + 2u = & -2 \\ 4x - y + z - u - v = & 5 \\ 2x + 3y - z - 4v = & 9 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{rr} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = & 2 \\ 2x_1 + 2x_2 - 6x_3 + 2x_4 = & -4 \\ 4x_1 + 5x_2 - x_3 + 3x_4 = & -3 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{rl} 7x_2 + x_3 = & 1 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = & 7 \\ -9x_1 - 5x_2 - 2x_3 = & 2 \end{array} \right.$$

28. Utiliza el método de Gauss para discutir las distintas soluciones de los siguientes sistemas según los distintos valores de los parámetros $a, b \in \mathrm{R}$.

$$\left\{ \begin{array}{rr} 2x + 6y + az = & 12 \\ 3x + (a+5)y + 6z = & b - a \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{rl} ax + bz = & 2 \\ ax + ay + 4z = & 4 \\ ax + 2z = & b \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{rl} ax + y + z = & 1 \\ x + ay + z = & a \\ x + y + az = & a^2 \\ (a+1)y + z = & a + 1 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{rl} 2x + by = & 1 \\ -2x + 2y + az = & 1 \\ 2x - 2y + bz = & a + b - 1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{rl} x - z = & 2 \\ 2x + ay - 3z = & 4 \\ -x + a^2 z = & a - 3 \\ 3x + ay - 4z = & 6 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{rr} (2+a)x + ay + 2z = & 2a - 2 \\ 2x + (2-a)y = & 0 \\ (a+1)x + (a+1)z = & a - 1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{rl} 2x + ay + z = & 0 \\ 2x - 2y + z = & 0 \\ bx + 2y - 4z = & 0 \\ 4x + 2y + 7z = & 0 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{rl} x + ay + bz = & 1 \\ ax + by + z = & b \\ x + aby + z = & a \end{array} \right.$$