Matemática Discreta y Álgebra - Curso 2020/21. ESP. VECTORIALES Y BASES

1. Estúdiese si el conjunto $\mathbb{R}^2$ respecto de las operaciones:
   $(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$
   $\alpha(a, b) = (\alpha a, 0)$
   es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$

2. Estúdiese si tiene estructura de subespacio vectorial el subconjunto de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot\mathbb{R})$ formado por todas las ternas (x, y, z) tales que $x - y + z = 2$. Haz lo mismo con la condición $x - y + z = 0$.

3. Sea $B = \{(1, 1, 0), (0, 2, 1), (1, 1, 3)\}$ un conjunto de vectores de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot\mathbb{R})$. Demuéstrese que estos vectores forman una base de $\mathbb{R}^3$ y calcular las coordenadas del vector $(3, 1, 2)$ respecto de esta base.

4. En el espacio vectorial (V,+,$\cdot\mathbb{R}$), demuéstrese que si los vectores $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ forman una base, también es una base la formada por los vectores $B' = \{v_1, v_2, v_3\}$ siendo

$$v_1 = 2u_1 + u_3, v_2 = 2u_2, v_3 = u_1 - 3u_3$$

5. Demuéstrese que el cojunto formado por los vectores

$$1 + 2x, 1 + x^2, 1 - x^2, 2 - x$$

   es linealmente dependiente en el espacio $\mathbb{R}_2[x]$ de los polinomios con coeficientes reales y grado menor o igual que dos. A partir de dicho conjunto, encontrar un conjunto máximo de vectores linealmente independientes.

6. Obtenga el valor o valores de h para que y esté en $Gen\{v_1, v_2, v_3\}$ siendo: $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ h \end{pmatrix}$

7. Liste dos vectores en $Gen\{v_1, v_2\}$ siendo $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -62 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

8. Describa geométricamente $Gen\{v_1, v_2\}$ para los vectores $v_1 = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix}$

9. Determine si los siguientes conjuntos de vectores son linealmente independientes. Justifique la respuesta.

   a) $v_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix}$

   b) $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix}$

10. Determine si b es una combinación lineal de los vectores a_1, a_2 y a_3: $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$

11. a) Demuéstrese que el conjunto

$$U = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{Q} : x + y + z + w = 0, x + y - z - w = 0\}$$

es un subespacio vectorial de $(\mathbb{Q}^4, +, \cdot\mathbb{Q})$

b) Prúebese que los vectores $u_1 = (1, -1, 3, -3)$ y $u_2 = (0, 0, 1, -1)$ son base de dicho subespacio

c) Hállese las coordenadas del vector $u = (-3, 3, -4, 4)$ respecto de dicha base.

12. Hállese la dimensión de los subespacios de $\mathbb{R}^5$ generados por los siguientes subconjuntos de vectores:

$$A = \{(1, 1, 1, -1, -1), (2, 0, 2, 0, 1), (3, 1, 3, -1, 0), (5, 1, 5, -1, 1)\}$$

$$B = \{(6, 3, 9, 3, 3), (8, 4, 12, 4, 4), (10, 5, 15, 5, 5)\}$$

13. Determínase la dimensión y una base de los siguientes subespacios de $(\mathbb{R}^4, +, \cdot\mathbb{R})$:

$$U = \{(x, y, z, w) : x - y = 0, 2x + z + w = 0, x + y + z + w = 0\}$$

$$W = \{(\alpha + \beta + \gamma, \beta + \gamma, \gamma, \gamma) : \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$$

14. Sean $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ y $B' = \{v_1, v_2, v_3\}$ dos bases de un espacio vectorial V de las que sabemos que:

$$u_1 = v_1 + v_2, u_2 = v_2 + v_3, u_3 = v_1 + v_3$$

a) Calcúlese la matriz de cambio de base de B a B'

b) Calcúlese la matriz de cambio de base de B' a B

c) Calcúlese las coordenadas del vector $v = (1, 0, 3)_B$ respecto de B' y las del vector $w = (5, 3, 1)_{B'}$ respecto de B.

15. Sean $B = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ y $B' = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dos bases de un espacio vectorial V de las que sabemos que:

$$u_1 = v_1 + v_3, u_2 = v_2 + v_3, u_3 = v_2 + v_4, u_4 = v_1 + 2v_4$$

a) Calcúlese la matriz de cambio de base de B a B'

b) Calcúlese la matriz de cambio de base de B' a B

c) Calcúlese las coordenadas del vector $v = (1, 1, 2, 2)_B$ respecto de B' y las del vector $w = (0, 7, 0, 3)_{B'}$ respecto de B.

16. Sea $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ una base de un espacio vectorial V de dimensión 3. Dados los vectores $u = u_1 - 2u_2 + 3u_3$, $v = 2u_1 - 3u_2 + u_3$, y $w = -au_2 + bu_3$,

(a) ¿Qué relación deben cumplir a y b para que el conjunto $\{u, v, w\}$ sea también una base?

(b) Para $a = 1$ y $b = 4$, halla las coordenadas del vector $3u_1 - 6u_2 + 8u_3$ respecto de la base $\tilde{\mathcal{B}} = \{u, v, w\}$.

17. Dado el siguiente subespacio de $\mathbb{R}^4$ $S = \{(x, y, z, t) \mid x + y = 0,\ z + 2t = 0\}$, calcula una base y la dimensión de S, y amplía dicha base hasta una base de $\mathbb{R}^4$.

18. Sea $S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = x + 2y + 4z + 8t\}$. Prueba que S es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$. Halla dos bases diferentes de S, e indica la dimensión de S.